Théorie du choix social
-
Episode 2
-
Arrow contre May : le match

Olivier SICARD
IREM de la REUNION

Décembre 2015

Table des matières

I Introduction

Voter semble facile pour la plupart des citoyens, pourtant « bien voter », c'est à dire voter de la façon la plus démocratique possible est clairement plus délicat ! Sans reparler des premiers paradoxes énoncés par le Marquis de Condorcet et Jean-Charles de Borda dans les années 1780, où par exemple un candidat peut être élu alors qu'il est détesté par la grande majorité de la population, le point clé de la théorie ordinale du choix social est sans nul doute le théorème d'impossibilité d'Arrow.

En 1951, ce dernier démontra que pour plus de trois alternatives, la seule méthode d'agrégation vérifiant à la fois les principes d'universalité, d'unanimité et d'indépendance face aux alternatives non pertinentes était la dictature [1]. Enfer et damnation, la dictature serait donc la méthode d'agrégation la plus démocratique qui soit ! Loin de conclure une telle atrocité et de mettre le point final à la démocratie, ce théorème est considéré comme le point de départ de la théorie du choix social. Depuis Kenneth Arrow, une multitude de travaux ont été réalisés pour mieux cerner les problèmes inhérents aux procédures de vote et tenter d'y apporter des solutions, tout ceci dans l'optique de toujours tendre vers plus de démocratie.

Pour ce deuxième épisode, nous allons tout d'abord proposer une modélisation matricielle des préférences ordinales puis nous reparlerons du problème général de l'agrégation des préférences et du théorème d'impossibilité, enfin nous nous interesserons au théorème de May qui est le premier théorème de possibilité en théorie du choix social et nous verrons dans quelles mesures il aurrait pu être un contre-exemple au théorème d'Arrow.

II Modélisation des préférences ordinales

Dès lors que l'on se préoccupe de « choix », il est naturel de chercher à modéliser comment comparer en termes de préférence les objets de la décision. La littérature sur la modélisation des préférences est relativement vaste. Ceci s'explique sûrement par le fait que la nécessité de modéliser des préférences se fait sentir non seulement en Théorie du Choix Social mais aussi dans de nombreuses disciplines comme l'Economie, la Psychologie, la Recherche Opérationnelle, l'Intelligence Artificielle,...

Nous présenterons d'abord la modélisation classique des préférences

1. On pourra trouver une démonstration simplifiée de ce théorème dans l'article précédent : *La Dictature éclairée serait-elle plus démocratique que la Démocratie ?*, pour une preuve complète se référer à *Social choice and individual values* de Kenneth ARROW

ordinales puis dans un deuxième temps nous prendrons le parti de considérer ses préférences d'un point de vue matriciel.

II.1 Relation de surclassement sur l'ensemble des alternatives

En théorie du choix social, les préférences ordinales, qu'elles soient individuelles ou collectives sont représentées par un préordre total sur l'ensemble des candidats ou des alternatives possibles.

Plus exactement, soit X un ensemble fini d'alternatives, définir une relation de surclassement S sur X , c'est lui associer une relation binaire S. aSb signifiant que a surclasse b, c'est-à-dire que a est au moins aussi bon que b.

Cette relation de surclassement S doit être un préordre total sur X, c'est-à-dire que :

- S doit être transitive (xSy et $ySz \Rightarrow xSz$) .
- S doit être réflexive (xSx)
- S n'est pas forcément antisymétrique, en effet il est possible que xSy et ySx sans que $x = y$, en fait dans ce cas xIy.
- Le préordre S doit être total c'est à dire que chaque individu est capable de comparer une paire quelconque d'alternatives.

Nous noterons alors I la relation d'indifférence et P la relation de préférence stricte associées à la relation de surclassement S :

- $aIb \Longleftrightarrow aSb$ et bSa.
- $aPb \Longleftrightarrow \neg(bSa)$.

<u>Théorème 1 :</u>
Si S est un préordre total, alors :

1. P est transitive
2. I est une relation d'équivalence
3. aPb et $bIc \Rightarrow aPc$
4. aIb et $bPc \Rightarrow aPc$

<u>Preuve :</u>
Pour démontrer ce théorème nous utiliserons le fait que la contraposée de la transitivité de S s'écrive : "$cPa \Rightarrow bPa$ ou cPb."

1. Preuve de la transitivité de P
   Supposons que aPb et bPc, et montrons que aPc.
   $aPb \Rightarrow$ (aPc ou cPb) or cPb est impossible puisque l'on sait déjà que bPc, donc on a bien aPc. ■
2. Pour montrer que I est une relation d'équivalence, il suffit de vérifier qu'elle est transitive car I est déjà symétrique et réflexive.

Supposons que aIb et bIc, et montrons que aIc.
aIb et $bIc \Rightarrow aSb$ et bSc et bSa et $cSb \Rightarrow aSc$ et $cSa \Rightarrow aIc$. ■

3. Supposons que aPb et bIc et montrons que aPc
   aPb et $bIc \Rightarrow aPc$ et bSc et $cSb \Rightarrow$ (aPc ou cPb) et bSc et cSb.
   Or cPb est impossible puisque bSc ce qui implique que aPc. ■
4. Le point 4 se démontre exactement comme le point 3.■

Il est à noter que la transitivité de P est sûrement la propriété la plus importante de notre relation de surclassement car elle interdit à P d'admettre des cycles ce qui aurait très peu de sens pour une relation de surclassement.

II.2 Notation matricielle d'une structure préférentielle

Nous nous proposons maintenant de représenter les relations de surclassement à l'aide de matrices. Le but n'est pas d'abandonner la notation binaire S au profit de cette nouvelle notation matricielle, mais plutôt de pouvoir jongler d'une notation à l'autre afin, par exemple, de simplifier certaines preuves, de clarifier certains points de vue ou tout simplement d'avoir une autre vision de la notion de structure préférentielle.

Notons $X = (x_1, ..., x_p)$ un n-uplet d'alternatives, et définissons $O = (o_{ij}) \in M_p(\mathbb{R})$ « la matrice des préférences ordinales » de la manière suivante :

1. $o_{ij} = 0$ si et seulement si $x_j I x_i$
2. $o_{ij} = 1$ si et seulement si $x_j P x_i$
3. $o_{ij} = -1$ si et seulement si $x_i P x_j$
4. le théorème 1 implique que $o_{ij} + o_{jk} = o_{ik}$ avec la table d'addition suivante :

+	0	1
0	0	1
1	1	1

Nous noterons $O_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices des préférences ordinales. Remarquons que toute matrice O de préférences ordinales est antisymétrique car $o_{ij} = -o_{ji}$ et $o_{ii} = 0$. Cependant, à l'instar des matrices antisymétriques réelles, $O_p(\mathbb{R})$ n'est pas un espace vectoriel, car la somme de deux matrices de préférences ordinales n'appartient pas à $O_p(\mathbb{R})$.

Nous verrons par la suite que ce "défaut" de l'ensemble $O_p(\mathbb{R})$ nous pousse à définir la fonction Φ suivante :
$\Phi : M_p(\mathbb{R}) \longrightarrow M_p(\mathbb{R})$ qui à toute matrice $M = (m_{ij})$ associe $\Phi(M)$ en posant :

- $\Phi(M)_{ij} = 0 \Longleftrightarrow m_{ij} = 0$
- $\Phi(M)_{ij} = 1 \Longleftrightarrow m_{ij} > 0$
- $\Phi(M)_{ij} = -1 \Longleftrightarrow m_{ij} < 0$

Remarquons que bien que les coefficients de $\Phi(M)$ soient tous dans $\{-1, 0, 1\}$, $\Phi(M)$ n'appartient pas forcément à $O_p(\mathbb{R})$.

III Le problème de l'agrégation des préférences

III.1 Fonction d'agrégation Arrowienne

Notons $V = (v_1, ..., v_n)$ le n-uplet des votants et $X = (x_1, ..., x_p)$ le p-uplet des candidats, chaque votant v_i possède sur X une matrice des préférences ordinales $O_i \in O_p(\mathbb{R})$. Nous appellerons profil le n-uplet $\pi = (O_1, ..., O_n) \in O_p(\mathbb{R})^n$ des préordres individuels de chacun des votants.

Voter c'est agréger les préférences des votants en une préférence collective. Deux processus sont alors envisageables, premièrement choisir parmi X la (ou les) meilleure(s) alternatives(s), et deuxièmement classer toutes les alternatives de X. Nous allons plus particulièrement nous intéresser aux procédures de classement, celles-ci étant plus générales que les procédures de choix. C'est Kenneth Arrow qui fut le premier à proposer une définition des fonctions d'agrégation :

Une méthode d'agrégation au sens Arrowien du terme est une fonction $f : O_p(\mathbb{R})^n \longrightarrow O_p(\mathbb{R})$ qui à tout profil π associe une matrice de préférences ordinales agrégée $f(\pi)$ donnant le classement global des alternatives.

III.2 Le théorème d'impossibilité d'Arrow

Pour répondre aux paradoxes de la théorie du choix social soulevés entre autre par Condorcet et Borda, Kenneth ARROW tenta en 1951, de proposer une méthode d'agrégation f des préférences des votants démocratiquement acceptable, pour finalement aboutir à son théorème d'impossibilité (voir son livre *Social choice and individual values*).

L'objectif est de fabriquer une fonction d'agrégation f démocratiquement acceptable, c'est à dire vérifiant au minimum les quatre principes de rationalité suivants :

- le principe d'Universalité (U)
- le principe d'Unanimité stricte ou de Pareto faible(P)
- le principe d'indifférence aux alternatives non pertinentes (I)
- le principe de non dictature (D)

Redétaillons plus précisément chacun de ces quatre principes :

III.2.1 Le principe d'Universalité (U)

Une fonction d'agrégation f vérifie le principe d'universalité si les votants ne sont en aucun cas restreints dans le classement des alternatives. Autrement dit, f vérifie le principe d'universalité si tous les préordres individuels sont autorisés, ainsi le domaine de définition de la fonction f est l'ensemble de tous les profils $O_p(\mathbb{R})^n$.

III.2.2 Le principe d'Unanimité - ou de Pareto faible (P)

Considérons deux candidats a et b. Si tous les votants sont d'accord pour classer le candidat b devant le candidat a, alors b sera au final effectivement classé devant a après agrégation.

Plus précisément en notant S_i le préordre associé au votant v_i et S le préordre agrégé :

Une fonction d'agrégation f vérifie le principe de Pareto faible lorsque $(\forall v_i \in V,\, aP_ib) \Rightarrow aPb$.

Avec la notation matricielle, en posant $O^i = (o^i_{xy})$ la matrice des préférences ordinales associée au votant v_i et $O = (o_{xy})$ la matrice des préférences ordinales agrégée, on obtient :

f vérifie le principe de Pareto lorsque $(\forall v_i \in V,\, o^i_{ab} = 1) \Rightarrow (o_{ab} = 1)$.

III.2.3 Le principe d'indifférence aux alternatives non pertinentes (I)

Ce principe permet de ne pas s'inquiéter des alternatives oubliées (car non pertinentes à priori) : Il ne faut pas que l'ajout ou le retrait d'une alternative change l'ordre des autres alternatives.

Une fonction d'agrégation f vérifie l'indifférence aux alternatives non pertinentes si pour tout duo $\{x, y\}$ de candidats, la préférence collective restreinte à ce duo ne dépend que des préférences individuelles sur ce duo et non pas des préférences individuelles par rapport aux autres candidats.

Autrement dit : Si l'on note $O_{|x,y}$ la matrice des préférences ordinales restreinte à $\{x, y\}$ et $\pi_{|x,y} = (O^1_{|x,y}, ..., O^n_{|x,y})$, alors une fonction d'agrégation ordinale f vérifie le principe d'indifférence aux alternatives non pertinentes si $f(\pi_{|x,y}) = f(\pi)_{|x,y}$. Par abus de notation nous pouvons alors écrire $f(o^1_{xy}, ..., o^n_{xy}) = o_{xy}$.

III.2.4 Le principe de non dictature (D)

Soit v_k un votant, ayant pour matrice de préférences O^k. f est appelée une dictature si pour tout profil π, et pour tout couple d'alternatives x et y, $o^k_{xy} = 1 \Rightarrow f(\pi)_{xy} = 1$. Cela signifie que le votant-dictateur v_k dicte à l'ensemble des votants ses préférences strictes.

Nous dirons qu'une méthode d'agrégation f vérifie le principe de non dictature si f n'est pas une dictature.

Maintenant que les quatre principes ont été détaillés, nous pouvons énoncer le théorème d'impossibilité d'Arrow :

> Théorème 2 : impossibilité générale d'Arrow (1951)
> Pour un nombre fini de votants et au moins trois alternatives, il n'existe aucune fonction d'agrégation (au sens Arrowien du terme) vérifiant les quatre principes (U), (P), (I), (D).

IV Le théorème de May (1952)

En 1952, May propose une caractérisation de la méthode d'agrégation la plus intuitive qui soit : la règle de la majorité simple. C'est le premier théorème de possibilité, cependant celui-ci se restreint au cas où il n'y a que deux candidats.

IV.1 La règle de la majorité simple

La règle de la majorité simple est une règle d'agrégation des préférences largement répandue à travers le monde car très simple et très intuitive. Elle stipule qu'un candidat x sera préféré à un candidat y si et seulement si le nombre de votants préférant x à y dépasse le nombre de votants préférant y à x.

Plus exactement si l'on note $N(xSy)$ le nombre de votants préférant x à y, alors la règle de la majorité simple peut se définir de la manière suivante :

> Pour tout profil $\pi = (O_1, ..., O_n)$ et pour tout couple de candidats (x, y), $xSy \Longleftrightarrow [N(xS_iy) \geq N(yS_ix)]$

D'un point de vue des matrices de préférences ordinales, cela s'écrit :

$$o_{yx} = 0 \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} o^i_{yx} = 0$$

$$o_{yx} = 1 \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} o^i_{yx} > 0$$

$$o_{yx} = -1 \iff \sum_{i=1}^{n} o_{yx}^{i} < 0$$

Au final $f = \Phi \circ \sum$ où $\sum$ est la fonction somme et Φ est la fonction définie précédemment.

IV.2 Enoncé et preuve du théorème de May

> Théorème :
> Dans le cadre où l'ensemble des alternatives possibles est réduit à deux possibilités x et y, une fonction d'agrégation sociale f est la règle de la majorité simple si et seulement si elle vérifie l'universalité (U), l'anonymat (A), la neutralité (N) et la monotonie stricte(MS).

Avant de démontrer ce théorème nous allons d'abord définir à l'aide des matrices de préférences ordinales, les propriétés (U), (A), (N) et (MS) de manière générale puis les traduire dans le cadre qui nous intéresse, c'est à dire lorsqu'il n'y a que deux alternatives x et y.

Remarquons que puisqu'il n'y a que deux alternatives, les matrices de préférences ordinales ne peuvent être que de trois formes : $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, et puisque les matrices sont antisymétriques, seule la valeur de o_{yx} est à déterminer, connaissant les valeurs des o_{yx}^{i}.

1. L'universalité (U)
   Une fonction d'agrégation f vérifie le principe d'universalité si les votants ne sont en aucun cas restreints dans le classement des candidats. Autrement dit, f vérifie le principe d'universalité si tous les préordres individuels sont autorisés, ainsi le domaine de définition de la fonction f est l'ensemble $O_p(\mathbb{R})^n$.
   Dans le cas de deux candidats x et y, l'universalité nous assure que le n-uplet $(o_{yx}^{1}, ..., o_{yx}^{n})$ peut prendre toutes les valeurs de $\{-1, 0, 1\}^n$

2. L'anonymat (A)
   La propriété d'anonymat stipule que la méthode d'agrégation ne peut en aucun cas favoriser un votant. Autrement dit, le résultat du vote reste inchangé même après permutation des votants.

   Plus précisément une fonction d'agrégation f est anonyme, si pour tout profil $\pi = (O_1, ..., O_n)$ et pour toute permutation $\sigma \in S_n$, $f(O_{\sigma_1}, ..., O_{\sigma_n}) = f(\pi)$.

   Remarquons que si l'anonymat est une propriété démocratiquement importante, il existe des cas où elle n'est pas vérifiée : pensons simplement aux méthodes de vote à poids ou au droit de veto.

Dans le cas de deux candidats x et y, l'anonymat nous assure que si $(o'^{1}_{yx}, ..., o'^{n}_{yx})$ est une permutation de $(o^{1}_{yx}, ..., o^{n}_{yx})$, alors $f(o'^{1}_{yx}, ..., o'^{n}_{yx}) = f(o^{1}_{yx}, ..., o^{n}_{yx})$

3. La neutralité (N)
   La neutralité stipule qu'aucun candidat ne peut être favorisé d'aucune manière que ce soit par la méthode d'agrégation. Cela signifie que si chaque votant permute deux candidats dans ses préférences individuelles, au final cette permutation s'applique aussi après agrégation.
   Une fonction d'agrégation f est neutre si pour tout profil $\pi = (O_1, ...O_n) \in O_p(\mathbb{R})^n$ et si pour toute matrice de permutation σ des candidats, $f(\sigma^{-1}\pi\sigma) = \sigma^{-1}f(\pi)\sigma$. (où $\sigma^{-1}\pi\sigma = (\sigma^{-1}O_1\sigma, ..., \sigma^{-1}O_n\sigma)$)
   Dans le cas de deux candidats x et y, la neutralité nous assure que $f(-o^{1}_{yx}, ..., -o^{n}_{yx}) = -f(o^{1}_{yx}, ..., o^{n}_{yx})$

4. La monotnonie stricte
   Ce principe traduit le fait que plus les votants s'accordent à préférer y par rapport à x et plus il y a de chances que y soit effectivement préféré à x après agrégation.
   Plus précisément, soient deux profils π et π' construits sur la base des mêmes votants, posons $O = f(\pi)$ et $O' = f(\pi')$.
   Soient deux alternatives x et y, une fonction d'agrégation f vérifie le principe de monotonie stricte si deux n-uplets $(o'^{1}_{yx}, ..., o'^{n}_{yx})$ et $(o^{1}_{yx}, ..., o^{n}_{yx})$ sont tels que $\forall i \neq k, o'^{i}_{yx} \geqslant o^{i}_{yx}$ et $o'^{k}_{yx} > o^{k}_{yx}$, alors $o'_{yx} \geqslant 0 \Longrightarrow o_{yx} = 1$

Maintenant que les quatre propriétés ont été définies, démontrons le théorème de May par double implications.

Preuve du Théorème de May :

Le sens direct est immédiat : il est aisé de constater que la fonction somme vérifie les quatre propriétés (U), (A) (N) et (MS).

Réciproquement, supposons que f vérifie les quatre propriétés. Premièrement puisque f est anonyme, la valeur de $o_{yx} = f(o^{1}_{yx}, ..., o^{n}_{yx})$ ne dépend que du nombre de 0, 1 et -1 présents et non de leur position. De plus, $N(0) = n - N(1) - N(-1)$ donc le nombre de 0 dépend uniquement du nombre de 1 et de -1, cela implique que la valeur de $o_{yx} = f(o^{1}_{yx}, ..., o^{n}_{yx})$ ne dépend tout compte fait que du nombre de 1 et de -1.

– Nous allons commencer par supposer que $\sum_{i=1}^{n} o^{i}_{yx} = 0$ ceci équivaut à $N(1) = N(-1)$. Par anonymat $f(-o^{1}_{yx}, ..., -o^{n}_{yx}) = f(o^{1}_{yx}, ..., o^{n}_{yx})$ puisqu'il y a autant de "1" que de "-1" et que l'ordre ne compte pas, mais par neutralité $f(-o^1_{yx},...,-o^n_{yx}) = -f(o^1_{yx},...,o^n_{yx})$, on en déduit donc que $o_{yx} = 0$.

- Supposons maintenant que $\sum_{i=1}^{n} o^i_{yx} > 0$, ceci équivaut à $N(1) > N(-1)$. Posons $N(1) = N(-1) + m$, où $0 < m \leq n - N(1)$. Nous allons montrer par récurence sur m que $o_{yx} = 1$.
  Si $m = 1$, il existe donc au moins un $o^k_{yx} = 1$, posons alors le n-uplet $(o'^1_{yx},...,o'^n_{yx})$ tel que $\forall i \neq k, o'^i_{yx} = o^i_{yx}$ et $o'^k_{yx} = 0$ alors que $o^k_{yx} = 1$. Dans ce cas $\sum_{i=1}^{n} o'^i_{yx} = 0$ et $o'_{yx} = 0$ puis par monotonie stricte $o_{yx} = 1$.

  Supposons que pour un rang m fixé $o_{yx} = 1$, et montrons que ceci est toujours vrai au rang $m + 1$.
  Maintenant $N(1) = N(-1) + m + 1$, il existe donc au moins un $o^k_{yx} = 1$, posons alors le n-uplet $(o'^1_{yx},...,o'^n_{yx})$ tel que $\forall i \neq k, o'^i_{yx} = o^i_{yx}$ et $o'^k_{yx} = 0$ alors que $o^k_{yx} = 1$. Dans ce cas, pour le n-uplet $(o'^1_{yx},...,o'^n_{yx})$, $N(1) = N(-1) + m$ et par hypothèse de récurence, $o'_{yx} = 1$, puis par monotonie stricte $o_{yx} = 1$.
- Si l'on suppose finalement que $\sum_{i=1}^{n} o^i_{yx} < 0$, alors $\sum_{i=1}^{n} -o^i_{yx} > 0$ et $f(-o^1_{yx},...,-o^n_{yx}) = 1$, puis par neutralité,
  $o_{yx} = f(o^1_{yx},...,o^n_{yx}) = -f(-o^1_{yx},...,-o^n_{yx}) = -1$.

Ceci clôt la démonstration du théorème de May.$\blacksquare$

IV.3 Le théorème de May avec plus de deux candidats

Enoncé tel qu'il est formulé dans le paragraphe précédent, le théorème de May est faux pour plus de deux candidats pour la raison suivante. Considérons $\pi = (O_1,..,O_n)$ un profil et $O = f(\pi)$. Définir f c'est définir comment calculer O à partir de π, c'est à dire définir comment calculer pour tout couple (x, y) de candidats, o_{yx} à partir de π tout entier et pas seulement à partir des o^i_{yx}.

Pour pallier ce problème il faut rajouter une propriété à f : il faut stipuler que le calcul de la valeur de o_{yx} ne dépend uniquement que des o^i_{yx} et non des o^i_{zt} avec $z \neq y$ ou $t \neq x$

Autrement dit il faut que $f(\pi)_{|\{x,y\}} = f(\pi_{|\{x,y\}})$, c'est à dire que f doit être indépendante face aux alternatives non pertinentes.

Nous obtenons alors le théorème suivant :

Théorème de May sans restriction sur les candidats :
Une fonction d'agrégation sociale f est la règle de la majorité simple si et seulement si elle vérifie l'universalité (U), l'anonymat (A), la neutralité (N), la monotonie stricte(MS) et l'indépendance face aux alternatives non pertinentes (I).

IV.4 Une tentative avortée de contre-exemple au théorème d'Arrow

La règle de la majorité simple somme les n matrices $O_1, ..., O_n$. Si nous notons $\Sigma = \Phi \circ \sum O_i$, chaque coefficient Σ_{xy} de Σ appartient à l'ensemble $\{-1, 0, 1\}$ et indique l'ordre des préférences entre les candidats y et x.

Non seulement la règle de la majorité simple vérifie les propriétés (U) (A) (N) (MS) et (I), mais elle vérifie aussi (D) car la règle de la majorité n'est clairement pas une dictature, et elle vérifie aussi (P) car si tous les votants sont d'accord pour classer y devant x cela signifie que pour tout votant v_i, $o^i_{xy} = 1$ et dans ce cas après sommation $\Sigma_{xy} = 1$.

Au final la règle de la majorité vérifie les propriétés (U) (I) (D) (P) et serait donc un contre-exemple au théorème d'impossibilité d'Arrow ! La réponse est "non" car la règle de la majorité n'est pas une fonction d'agrégation Arrowienne.

En effet, le problème de cette règle réside dans le fait que $O_p(\mathbb{R})$ n'est pas un espace vectoriel, ce qui implique qu'en sommant ce genre de matrices pour obtenir Σ, on risque de détériorer voire de complètement détruire la structure des préordres individuels de départ.

Illustrons ce propos par deux exemples, nous verrons que dans le premier exemple la relation binaire agrégée est un cycle et viole la propriété de transitivité des préordres, alors que dans le deuxième exemple c'est la relation d'indifférence qui n'est plus transitive.

- Exemple 1 :

  Le votant 1 a pour préférences : $xPyPz$ soit $O_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

  Le votant 2 a pour préférences : $yPzPx$, soit $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

  Le votant 3 a pour préférences : $zPxPy$, soit $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

  $O_1 + O_2 + O_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, ce qui donne le cycle $xPyPzPx$, donc P n'est pas transitive.

- <u>Exemple 2 :</u>
Si maintenant nous ne considérons que les deux premiers votants, $O_1 + O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, ce qui donne xIy, xIz mais yPz ce qui implique que I n'est pas transitive.

Remarquons que lorsqu'il n'y a que deux candidats ces problèmes de transitivité n'ont pas lieu d'être, puisque la transitivité est une propriété qui doit faire intervenir au moins trois candidats. Conclusion, s'il n'y a que deux candidats, la règle de la majorité simple est bien une fonction Arrowienne mais elle ne contredit toujours pas le théorème d'impossibilité d'Arrow car celui-ci ne s'applique qu'à partir de trois candidats.

V Conclusion

Après la désillusion du théorème d'impossibilité d'Arrow, voici enfin un résultat positif : le théorème de May.

Premièrement May caractérise la règle de la majorité simple, ce qui en soit est une belle avancée dans la compréhension des méthodes de vote ; deuxièmement cette règle vérifie aussi une multitude d'autres propriétés démocratiques ce qui la rend d'autant plus attirante ; troisièmement la règle de la majorité simple est totalement viable démocratiquement lorsqu'il n'y a que deux alternatives, ce qui permet par exemple de légitimer mathématiquement l'utilisation du référendum comme méthode de vote dans notre Démocratie.

Cependant la règle de la majorité simple a ses défauts comme nous l'ont déjà montré Condorcet et Bordas dans l'étude des paradoxes liés aux élections. Dans les prochains épisodes nous verrons comment contourner certains d'entre eux, notamment en s'affranchissant du côté « ordinal » de la théorie du choix social et en plongeant dans le côté obscur de la théorie « cardinale » du choix social. Théorie dans laquelle le théorème d'impossibilité d'Arrow, que May a déjà fait fortement vascillé, s'écroulera comme un château de cartes.

VI Bibliographie

- Arrow K.(1963) *Social choice and individual values.* John Wiley and Sons, Inc., New York, London, Sydney.
- Gaertner W. (2009) *A Primer in Social Choice Theory.* Oxford University Press

– Marquis de Condorcet,(1785) *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralités des voix*, Paris
– May,K.O. (1952)*A Set of Independant Necessary and Sufficient Conditions for Simple Majority Decision.* Econometrica vol 20